



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Profesional de Matemática**

## **Teoría de nudos y sus invariantes**

### **TESINA**

**Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática**

**Modalidad Examen de Suficiencia Profesional**

### **AUTOR**

**Mariana Milagros VARGAS ORMEÑO**

**Lima, Perú**

**2016**



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

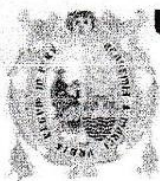
Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Vargas, M. (2016). *Teoría de nudos y sus invariantes*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---



# UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

## FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE ACTUALIZACIÓN PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL 2016-II  
MODALIDAD EXAMEN DE SUFICIENCIA PROFESIONAL

(R.D. N° 0521/FCM-D/2017)

### ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

#### ACTA DE EXPOSICIÓN DE TESINA

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ~~10.30~~ horas, del día ~~10~~ de ~~DICIEMBRE~~ del 2016, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador:

- |                               |            |
|-------------------------------|------------|
| - Mg. Carlos Peña Miranda     | Presidente |
| - Lic. Victoriano Yauri Luque | Miembro    |

Para la exposición de Tesina titulada: «**TEORÍA DE NUDOS Y SUS INVARIANTES**», presentada por la Bachiller **Mariana Milagros Vargas Ormeño**.

Luego de la exposición de la tesina, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, a las cuales la Bachiller **Mariana Milagros Vargas Ormeño**, respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

Hecha la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, la Bachiller **Mariana Milagros Vargas Ormeño** mereció la aprobación obteniendo como calificativo promedio y la nota de CATORCE (14) (letras y números).

A continuación los Miembros del Jurado, dan manifiesto que la Bachiller **Mariana Milagros Vargas Ormeño** APROBÓ la exposición de la Tesina.

Siendo las 11.00 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente acta en dos (2) copias originales.

  
Lic. Victoriano Yauri Luque  
MIEMBRO

  
Mg. Carlos Peña Miranda  
PRESIDENTE

## **Ficha Catalografica**

Mariana Milagros Vargas Ormeño  
Teoria de nudos y sus invariantes (Clasificación de nudos de hasta seis cruces utilizando los invariantes polinomiales)  
vi, 47 p. 29.7 cm. (UNMSM, Licenciado en Matemática Pura, 2016)  
Tesina – Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de ciencias Matemáticas. Matemáticas.1. UNMSM/FCM. Titulo (Serie)

# Resumen

Teoría de nudos y sus invariantes

(Clasificación de nudos de hasta seis cruces usando las invariantes de polinomios)

Mariana Milagros Vargas Ormeño

Diciembre 2016

Asesor:

Titulo obtenido: Licenciado en Matemática Pura

---

El presente trabajo iniciaremos con los conceptos básicos de la teoría de nudos, definición matemática del nudo, los movimientos de Reidemeister y los invariantes de nudos.

En este trabajo le prestaremos más atención a las invariantes polinomiales, los cuales usaremos para hacer la clasificación de nudos de hasta seis cruces.

**Palabras claves:** nudos equivalentes, invariantes de nudos, polinomio de Alexander, polinomio de Conway, polinomio de Jones

# **ABSTRACT**

Theory of knots and their invariants

(Classification of knots of up to six crosses using the invariant of polynomials)

Mariana Milagros Vargas Ormeño

Diciembre 2016

Advisor:

Obtained title: Mathematician

---

This work will begin with the basic concepts of the theory of knots, mathematical definition of knot, Reidemeister moves and the invariants of knots.

In this paper will pay you more attention to the invariant polynomials, which we will use to make the classification of knots of up to six crosses.

Key words: Knots equivalent, invariant of knots, Alexander polynomial, Conway polynomial, the jones polynomial.

# Índice General

<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Definición de nudo .....	2
1.2 Diagramas regulares .....	5
1.3 Equivalencia de nudos .....	6
<b>2. Clasificación de nudos</b>	<b>8</b>
2.1 Tabla de nudos .....	8
2.2 Invariantes de nudos .....	12
2.2.1 Movimientos de Reidemeister .....	12
2.2.2 Grupo nudo .....	17
2.2.3 Polinomio de Alexander .....	21
2.2.4 Polinomio de Conway .....	26
2.2.5 Polinomio de Jones .....	31
<b>3. Aplicación y conclusión</b>	<b>34</b>
3.1 Aplicación .....	34
3.2 Conclusión .....	40
<b>4. Bibliografía</b>	<b>41</b>



## Introducción

La teoría de nudos se ha desarrollado durante mas de un siglo, es una rama de la topología que estudia los aspectos geométricos de las curvas simples cerradas llamadas nudos.

Tuvo sus inicios con Peter. Guthrie. Tait, quien fue el primero en publicar una serie de escritos sobre este tema motivado porque su estudio era importante para el entendimiento de las propiedades químicas de los átomos. El problema principal en la teoría de nudos ha sido la clasificación de nudos, de manera que continuamente se buscan nuevas formas de poder identificar cuando dos nudos o enlaces son equivalentes. [1]

En el intento por resolver el problema de clasificación de nudos se usan diversos tipos invariantes, como por ejemplo el grupo fundamental del complemento del nudo en  $S^3$ .

La teoría de nudos actualmente es utilizada en diversas áreas como es: Física, Química, Mecánica y Biología.

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo se aplican los invariantes polinomiales los cuales son el polinomio de Alexander, polinomio de Conway y polinomio Jones en nudos de hasta seis cruces.

# Capítulo 1

## Preliminares

El objetivo de este capítulo será familiarizarnos con el concepto de nudo para después en los capítulos siguientes tratar sobre los invariantes donde le prestaremos más dedicación a los polinomios de Alexander, Conway y Jones para después ser utilizados para la clasificación de algunos nudos utilizando los polinomios mencionados.

### 1.1 Definición de Nudo

El concepto matemático de nudo es una abstracción de la siguiente imagen física: Se toma un trozo de cuerda, se anuda, y después se identifican los extremos de tal manera que no podamos distinguir donde se ha realizado ese pegado. El resultado es una cuerda circular anudada. Es decir, si nos imaginamos que podemos caminar dentro de la cuerda, y partiendo de un punto concreto, elegimos un sentido de marcha, al cabo de cierto tiempo volveríamos a pasar por el mismo punto, independientemente de que el anudamiento realizado sea más o menos complicado. Matemáticamente, no tiene importancia que la cuerda sea más o menos gruesa ni más o menos larga. Lo importante es que es una línea cerrada. [1]

**Definición 1.1.1.** Un nudo es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  es homeomorfo a  $S^1$  donde

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$  se llama la 1-esfera unitaria.

Ejemplos 1.1.1:

- 1) El nudo más sencillo es  $S^1$  visto en  $\mathbb{R}^3$ , esto es el conjunto de puntos

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$ , este nudo se denomina nudo trivial

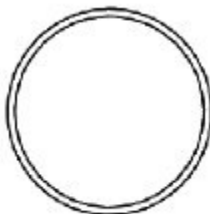
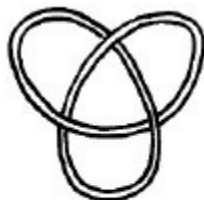
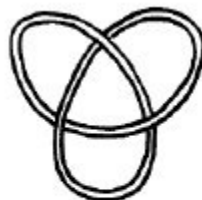


Figura 1: Nudo Trivial. Introducción a la teoría de nudos, Luping Wang Xiao

- 2) El nudo trébol es el nudo más sencillo no trivial y tiene tres cruces



(a) Trébol dextrógiro



(b) Nudo trébol levógiro

Figura 2: Nudos trébol. Introducción a la teoría de nudos, Luping Wang Xiao

### 3) Nudos con más de tres cruces

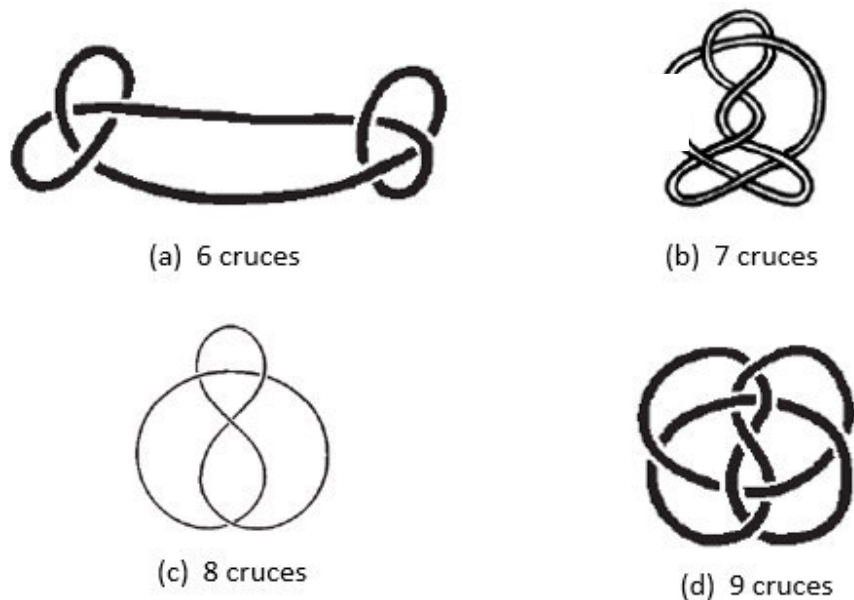


Figura 3: Algunos ejemplos de nudos. Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao,  
Introducción a la teoría de nudos de Luis Cisneros Molina

**Definición 1.1.2:** Un nudo es un caso particular de un enlace, que es simplemente una colección anudada de una o más cuerdas cerradas. Es claro entonces que un nudo es un enlace que tiene solo una cuerda. En la Figura 4 pueden ser observados dos ejemplos de enlaces compuestos por más de una cuerda.

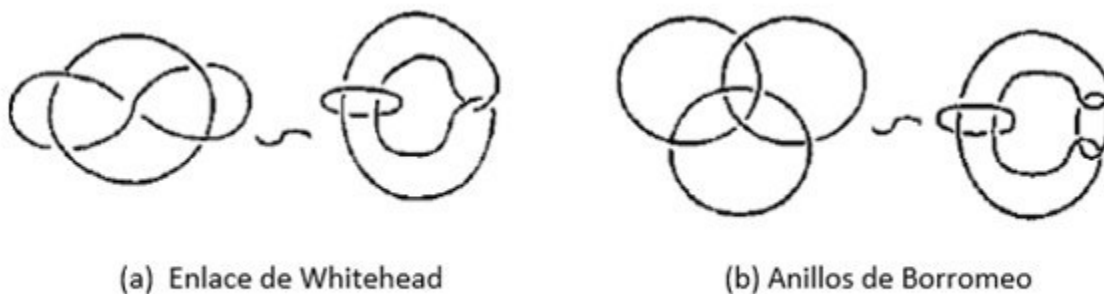


Figura 4: Ejemplos de enlaces. Teoría de nudos en el siglo XX de Lozano, M.

## 1.2 Diagramas regulares:

La forma más adecuada de representar un nudo es proyectando a un plano. En estas proyecciones no se aceptan puntos triples ni puntos de tangencia y con los puntos dobles el arco que pasa por debajo se dibuja cortado.

Estas representaciones se conocen como proyecciones regulares o diagramas planos del nudo y a los puntos dobles, cruces.

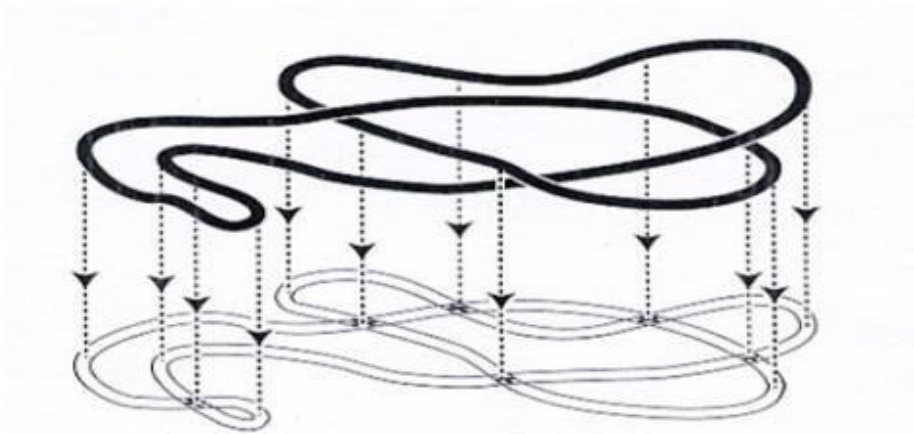


Figura 5: Proyección regular de un nudo para obtener un diagrama regular. Matemáticas de los nudos de Armando Martínez

Los cruces no permitidos en una proyección regular son:



Figura 6: Cruces prohibidos. Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao.

### 1.3 Equivalencia de nudos

**Definición 1.3.1:** Dos nudos son equivalentes si existe un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  que transforma un nudo en el otro.

La idea intuitiva de la definición alternativa es de la deformación continua en el tiempo que pase de un nudo a otro y que en cada instante del tiempo el objeto de paso sea un nudo.

**Definición 1.3.2:** Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos aplicaciones. Una homotopía de ambiente entre  $f$  y  $g$  es una aplicación continua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x), \forall x \in X$  y si  $t_0 \in I$ , entonces  $F(x, t_0)$  es un homeomorfismo.

**Definición 1.3.3:** Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos nudos, se dice que  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes si existe una isotopía del ambiente entre la identidad y un homeomorfismo  $h$  que transforma  $k_1$  en  $k_2$ , esto es una aplicación continua  $F: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F(x, 0) = x, F(x, 1) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$  y  $h(k_1) = k_2$

Las definiciones 1.3.2 y 1.3.3 no son iguales, dan origen a dos clasificaciones diferentes. Si consideramos la primera definición, el nudo trébol y su imagen especular son equivalentes.

**Definición 1.3.4:** La imagen especular de un nudo  $K$  es la imagen de  $K$  bajo la reflexión  $\mathcal{R}$  definido por  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$

Los nudos de la figura 2 no son isotópicos (fue probado por Max Deln en 1914) [2][9] [10], es decir si tenemos un nudo de trébol de cuerda por mucho que manipulemos no podremos pasar al nudo reflejado sin hacer cortes en la cuerda.

Suelen usarse las dos definiciones dependiendo del caso en el que nos encontramos. En las tablas de nudos primos, un nudo y su imagen especular se incluyen en la misma clase de nudo en la clasificación, así que se estaría haciendo uso de la primera definición.

¿Cómo determinar cuándo dos nudos son equivalentes?, es complicado dar una isotopía o un homeomorfismo de forma explícita y también demostrar que no existe.

**Teorema 1.3.1:** Sean  $K$  y  $K'$  dos nudos, donde ambos tienen proyecciones regulares y diagramas regulares iguales, entonces  $K$  y  $K'$  son equivalentes.

**Prueba:** Vease Charles Livingstone, Knot Theory, The Carus Mathematical Monographs [9]

## Capítulo 2

### Clasificación de nudos

Estudiaremos a continuación los conceptos básicos en la clasificación de nudo. La tabla de nudos primos y los invariantes de nudos.

#### 2.1 Tabla de nudos primos

Peter G. Tait motivado por las ideas de Lord Kelvin establece la primer tabla de nudos de hasta 9 cruces no con el rigor matemático, puesto que no se había demostrado formalmente que no hubiera ningún repetido. En 1927 esta tarea fue efectuada por Alexander y Briggs ayudándose del polinomio de Alexander. En 1969 Conway dio el siguiente paso llegando hasta nudos de 11 cruces, gracias a la creación de la notación que lleva su nombre.

En 1984 Kenneth Perko abogado no matemático se da cuenta de la equivalencia de dos nudos de 10 cruces que se aprecian como nudos distintos, hecho que había sido omitido por Conway.[2][10]

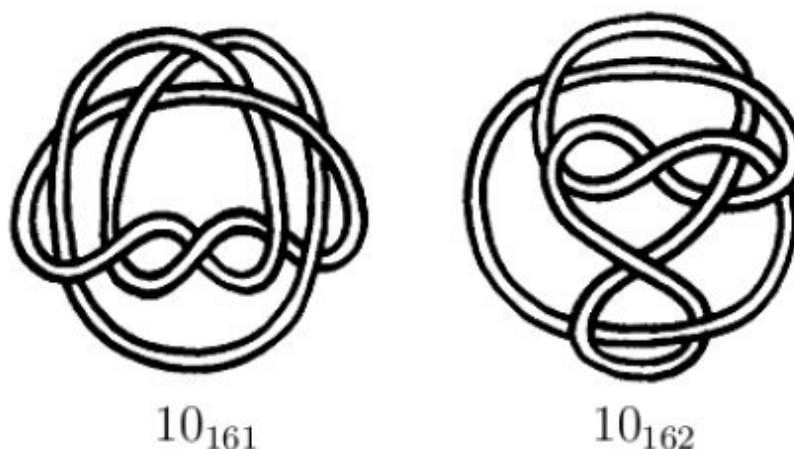


Figura 7: La pareja de nudos descubierta por Perko. Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao.



**Definición 2.1.1:** Dados dos nudos  $K$  y  $K'$ , la **suma conexa** de estos dos nudos es un nudo obtenido eliminando un arco en cada nudo que no pase por ningún cruce y unir los puntos extremos de esos arcos mediante caminos que no se crucen entre ellos.

**Definición 2.1.2:** Un nudo es **compuesto** si se puede escribir como la suma conexa de 2 nudos no triviales y en caso contrario se dicen **primos**.

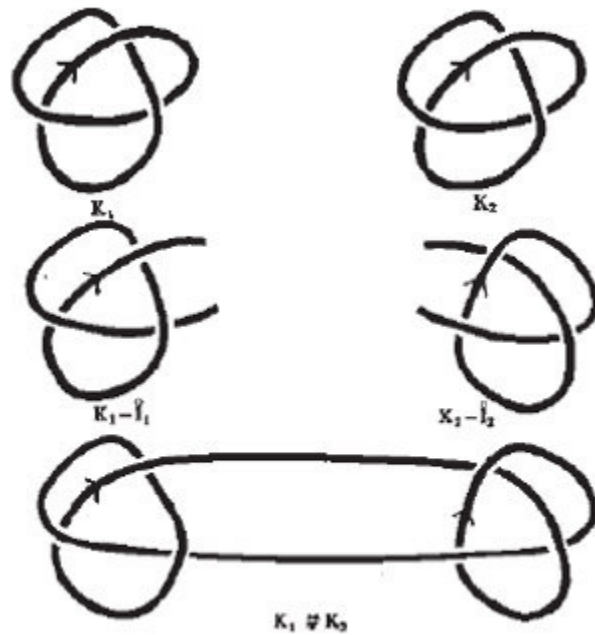


Figura 8. La suma conexa. Introducción a la teoría de nudos de Luis Cisneros Molina

Tenemos las siguientes tablas de nudos primos.

Cantidad de Cruces	Cantidad de nudos primos con n cruces
1	0
2	0
3	1
4	1
5	2
6	3
7	7
8	21
9	49
10	165
11	552
12	2176
13	9988
14	46972
15	253293
16	1388705

Tabla de Nudos

A un nudo se le puede escribir una orientación de su eligiendo una dirección de su recorrido.

**Definición 2.1.3:** Un nudo orientado es **invertible** si es equivalente a si mismo con orientación opuesta.

Ejemplo: El nudo trébol es invertible.

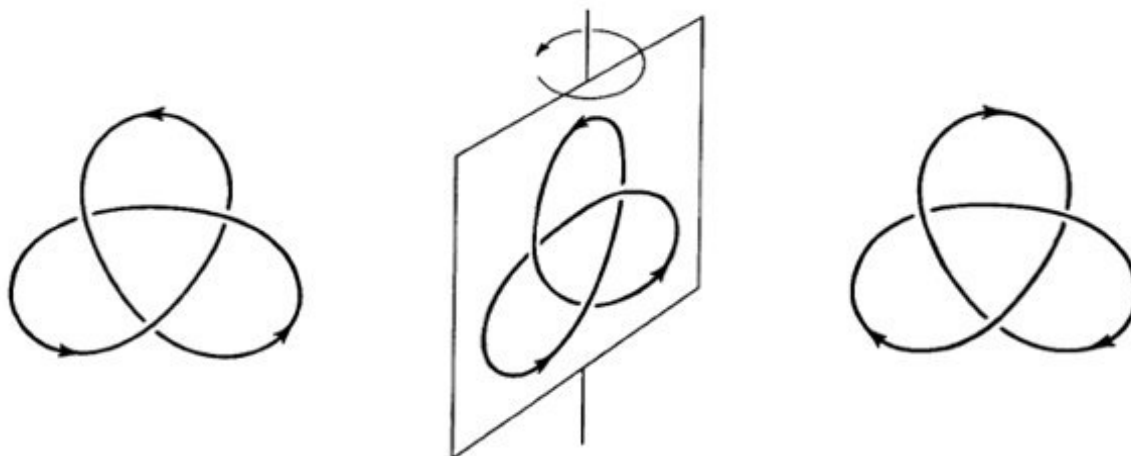


Figura 9. Introducción a la teoría de nudos de Luis Cisneros Molina

En la actualidad no existe un método general para decidir si un nudo es invertible o no. En 1964 Hale F. Trotter fue el primero que halló nudos no invertibles, esta demora en descubrir es debido a que nudos menores o iguales a 7 cruces son invertibles.[10]

Ejemplo 2.1.1: El nudo  $8_{17}$  es el primer nudo primo no invertible de la lista.

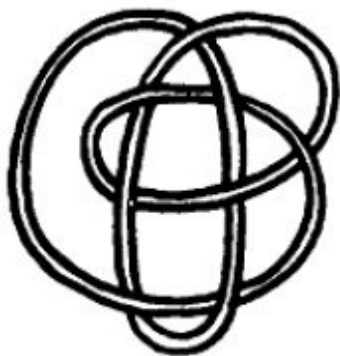


Figura 10: El nudo  $8_{17}$ . Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao

## **2.2 Invariantes de nudos**

Una forma de determinar si dos nudos son equivalentes o no, es encontrando alguna propiedad de los nudos que no cambie cuando estos se deforman y que sirva para distinguir nudos no equivalentes. A dichas propiedades se les llama invariantes de nudos.

En general, un invariante de nudos es unidireccional, es decir si dos nudos son equivalentes, entonces sus invariantes son iguales.

En muchos casos el recíproco no es cierto. Equivalentemente, si el invariante de dos nudos es diferente, entonces los nudos no pueden ser equivalentes, por lo tanto los invariantes de nudos nos proporcionan un método efectivo para distinguir nudos que no son equivalentes. A continuación se definiremos algunos de los invariantes de nudos.

### **2.2.1 Movimientos de Reidemeister**

Si tuviéramos un nudo hecho de una cuerda y dejamos eso sobre una superficie plana, puede caer de varias formas distintas, es necesario saber cuándo dos proyecciones representan el mismo nudo, debemos pensar que la cuerda es elástica, se puede estirar y deformar todo lo que queramos.

Los movimientos que hacemos en el espacio que supones nuevas intersecciones en su proyección son algo más complicado de transferir a dos dimensiones ya que para realizarlas debemos pensar por una de las posiciones prohibidas de las proyecciones regulares. Para ello existe lo que se conoce como movimientos de Reidemeister, que son las operaciones que se permiten realizar de forma local sobre el diagrama del nudo que pasen una posición y otra saltándose la posición problemática.

**Definición 2.2.1.1:** Si  $D$  es un diagrama regular de nudo (o enlace), las siguientes operaciones se llaman movimientos de Reidemeister los cuales son tres y se conocen como:

Movimiento de tipo *I* (agregar o remover un rizo)

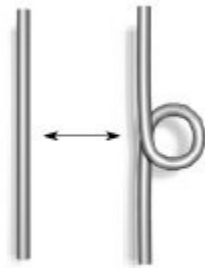


Figura 11: Movimientos del tipo *I*. Matemáticas de los nudos de Armando Martínez.

Movimientos del tipo *II* (agregar o remover dos cruces por arriba (por abajo) consecutivos)

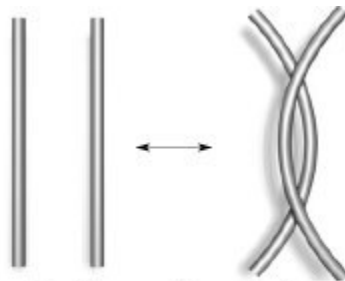


Figura 12: Movimiento tipo *II*. Matemáticas de los nudos de Armando Martínez.

Movimientos del tipo *III* (movimiento triangular)

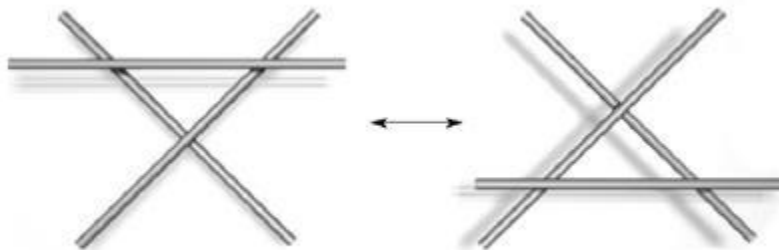


Figura 13: Movimientos tipo *III*. Matemáticas de los nudos de Armando Martínez.

Dos representaciones planas se corresponden con el mismo nudo si se puede pasar de una a otra mediante los movimientos de Reidemeister.

El recíproco también es cierto: Si dos nudos son equivalentes existe una combinación finita de movimientos de Reidemeister que permiten pasar de una a otro (resultado que fue probado por Reidemeister y por Alexander y Briggs)

Ejemplo 2.2.1.1:

Mediante los movimientos de Reidemeister se obtiene un nudo trivial.

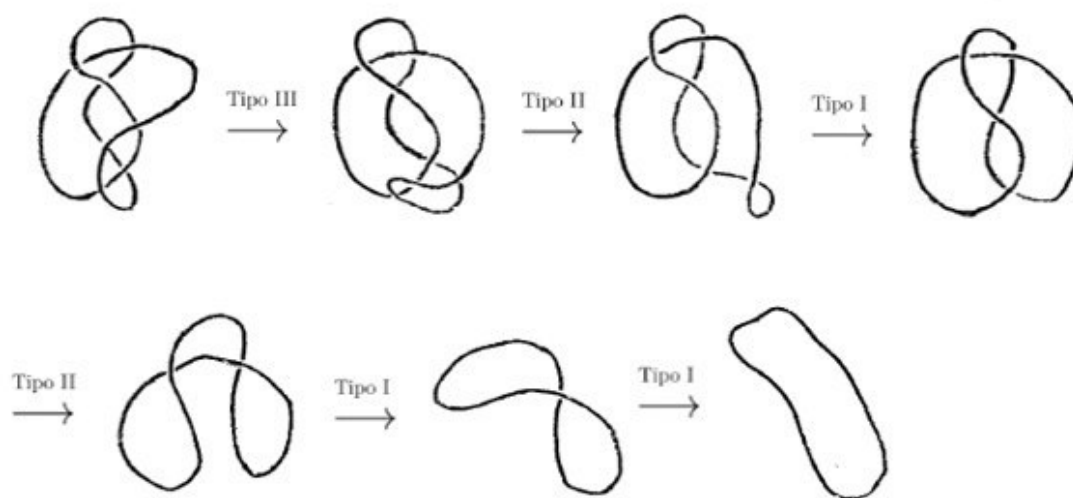


Figura 14: Obtención del nudo trivial mediante movimientos de Reidemeister. Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao.

El problema de determinar si un nudo se puede transformar en otro es el problema central del trabajo, existen numerosas técnicas para abordarlo. Trataremos de explicar algunos de estos métodos para resolver este problema.

Vamos a distinguir nuestro estudio a una clase de nudos que se comportan bien, debemos hacer una distinción entre nudos según pueden o no representarse mediante un diagrama con un

número finito de cruces o no. En el caso afirmativo tenemos un tipo de nudo llamado nudo dócil, si se da el caso contrario, se trata de un nudo salvaje.



Figura 15: Nudo salvaje. Introducción a la teoría de nudos de Luis Cisneros Molina

**Definición 2.2.1.2:** Decimos que un nudo  $k$  es dócil si es semejante a un nudo con solo un número finito de puntos de cruce, cada uno de los cuales es un punto doble propio.

**Definición 2.2.1.3:** Un nudo es quiral si no es isotópico a su imagen especular y en caso contrario se llamará anfiqueiral.

Un ejemplo de un nudo quiral es el nudo trébol, pues podemos obtener uno de los nudos trébol a partir del otro reflejándolo en el espejo, esta operación es válida como un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  en su reflejo. No es válido como una isotopía entre ellos.

Ejemplo 2.2.1.2: El nudo ocho es anfiqueiral.

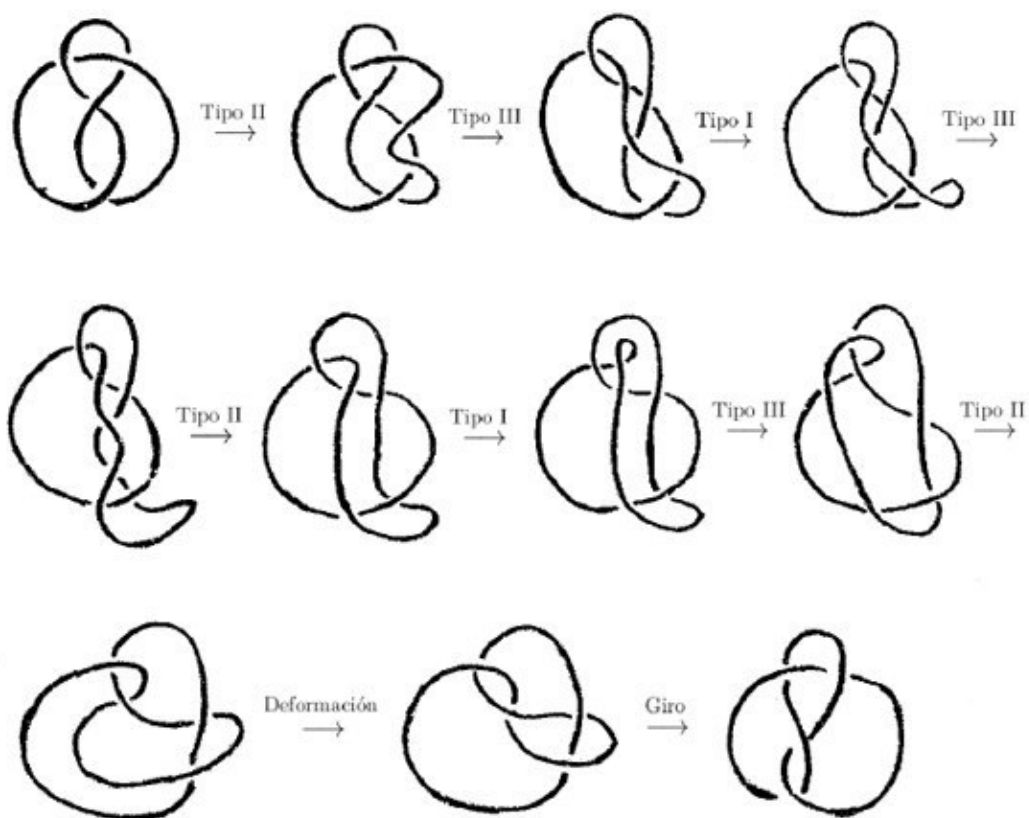


Figura 16: El nudo ocho que mediante movimientos de Reidemeister se obtiene su imagen especular. Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao.



### 2.2.2 El grupo del nudo:

En topología un invariante muy popular es el grupo fundamental, que es conjunto de las clases de equivalencias por homotopía de los lazos en un espacio topológico. No tiene sentido estudiar el grupo fundamental del nudo porque hemos dicho que todos los nudos son homeomorfos entre sí por lo tanto el grupo fundamental de cualquier nudo será isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . A su vez conocemos algo que sí caracteriza un nudo que es el espacio complementario de un nudo ( $\mathbb{R}^3 - K$ ) como espacio topológico. El grupo fundamental de  $\mathbb{R}^3 - K$  se llama el grupo de nudo. Esta invariante puede obtenerse utilizando un algoritmo sobre el diagrama plano del nudo, simplemente con la información que no proporciona los cruces.

**Definición 2.2.2.1:** Si  $K$  es un nudo y  $p$  es cualquier punto en  $\mathbb{R}^3 - K$ , entonces el grupo fundamental  $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$  es llamado el grupo de nudo  $K$ .

El procedimiento a seguir fue ideado por Wilhelm Wirtinger y nos proporciona la presentación del grupo del nudo, presentación que lleva su nombre

#### Presentación de Wirtinger:

Los pasos a seguir son:

- Dotamos al nudo una orientación.
- Dividimos al nudo en la unión de tantos arcos como cruces tenga el diagrama de nudo y considerando los arcos cuyo inicio y final sean un cruce por debajo.
- Asignamos el nombre de  $\alpha_i$  a los arcos siguiendo el orden que la orientación nos indica.
- Los  $\alpha_i$  tienen también una orientación que heredan de la del nudo.

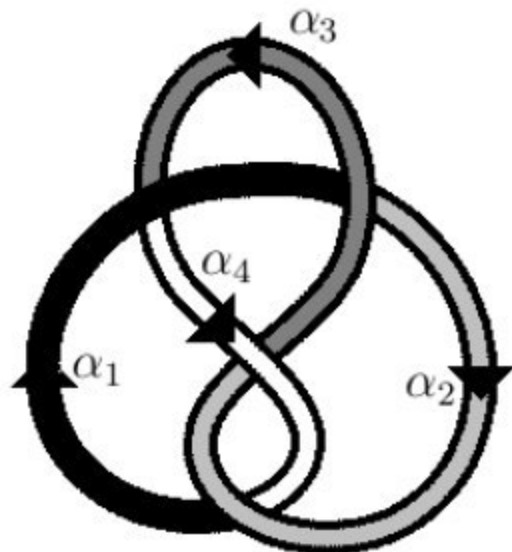


Figura 17: Nudo ocho. Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao.

- Para cada  $i$  consideramos un lazo con base en el punto  $(0,0,z_0)$  con  $z_0 \geq z$
- Los lazos descritos se llamaran  $x_i$  y serán los generadores del grupo de  $K$ .
- Las relaciones nos proporcionan los cruces
- Tenemos dos posibilidades de cruce, cuya relación correspondiente es la que se indica:

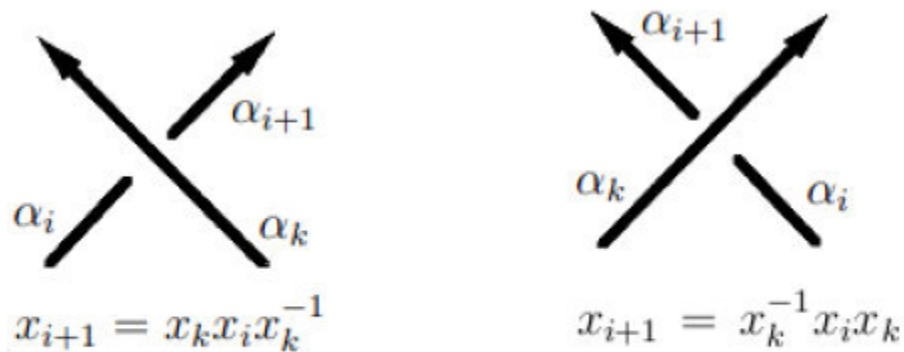


Figura 18: Las dos posibilidades de cruce. Introducción a la teoría de nudos de Luping Wang Xiao

En nuestro caso tenemos cuatro cruces que nos dan las siguientes relaciones:

$$x_1 = x_2^{-1}x_4x_2$$

$$x_3 = x_4^{-1}x_2x_4$$

$$x_2 = x_3x_1x_3^{-1}$$

$$x_4 = x_1x_3x_1^{-1}$$

Sea  $K$  el nudo 8, entonces el grupo nudo de  $K$  esta dado por:

$$\Pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4: x_4 = x_1x_3x_1^{-1}, x_2 = x_3x_1x_3^{-1}, x_3 = x_4^{-1}x_2x_4, x_1 = x_2^{-1}x_4x_2 \rangle$$

$$\Pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, x_2: x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1} = x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1 \rangle$$

Ejemplo 2.2.3.1:

Encontrar la presentación de Wirtinger del grupo fundamental del nudo trébol

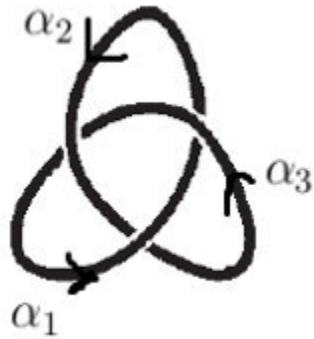


Figura 19: Nudo trébol. Elaboración propia.

Veamos que el grupo trébol tiene tres generadores  $x_1, x_2, x_3$  con las relaciones

$$x_1 = x_3^{-1}x_2x_3$$

$$x_2 = x_1^{-1}x_3x_1$$

$$x_3 = x_2^{-1}x_1x_2$$

Podemos ver, por ejemplo, que  $x_3$  es redundante; sustituyendo simplemente la primera relación con la segunda para obtener la tercera.

$$x_2 = x_1^{-1}x_3x_1 = x_1^{-1}x_3(x_3^{-1}x_2x_3) = x_1^{-1}x_2x_3$$

Con lo que  $x_3 = x_2^{-1}x_1x_2$ . Sea  $K$  el nudo trebol, entonces el grupo nudo de  $K$  es:

$$\Pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle \{x_1, x_2, x_3\} : \{x_1 = x_3^{-1}x_2x_3, x_2 = x_1^{-1}x_3x_1\} \rangle$$

$$= \langle \{x_2, x_3\} : \{x_2 = x_3^{-1}x_2^{-1}x_3x_3x_3^{-1}x_2x_3\} \rangle$$

$$= \langle \{x_2, x_3\} : \{x_2x_3x_2 = x_3x_2x_3\} \rangle$$

### 2.2.3 Polinomio de Alexander:

Sea  $K$  un nudo en  $S^3$ . Sea  $X$  la cubierta cíclica infinita del complemento de nudos de  $K$ . Este recubrimiento puede obtenerse cortando el complemento de nudo a lo largo de una superficie de Seifert de  $K$  y pegando infinitas copias del colector resultante con un límite de una manera cíclica. Existe una transformación de recubrimiento  $t$  que actúa sobre  $X$ .

Consideremos la primera homología (con coeficientes enteros) de  $X$ , denotada  $H_1(X)$ . La transformación actúa sobre la homología y así podemos considerar  $H_1(X)$  un módulo sobre  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . Esto se llama el **invariante de Alexander** o el **módulo de Alexander**.

El módulo es finitamente presentable, una matriz de presentación para este módulo se denomina **matriz de Alexander**. Si el número de generadores  $r$  es menor o igual que el número de relaciones  $s$  entonces consideramos el ideal generado por todos los  $r$  por los menores de la matriz; este es el ideal de ajuste cero o ideal de **Alexander** y no depende de la elección de la matriz de presentación. Si  $r > s$ , establezca el ideal igual a 0.

Si el ideal de Alexander es principal, tome un generador; esto se llama un polinomio Alexander del nudo. Dado que esto es único hasta la multiplicación por el monomio Laurent  $\pm t^n$ , uno fija a menudo una forma única particular. La elección de Alexander de la normalización es hacer que el polinomio tenga un término constante positivo.

Alexander demostró que el ideal de Alexander es no cero y siempre principal. Así, un polinomio Alexander siempre existe, y es claramente un invariante de nudo, denotado  $A_K(t)$ . El polinomio de Alexander para el nudo configurado por una sola cadena es un polinomio de  $t^2$  y luego es el mismo polinomio para el nudo de imagen especular. Es decir, no puede distinguir entre el nudo y uno para su imagen especular. [6][11]

El polinomio de Alexander, inventado en 1928 por J. Alexander [10], fue el primer polinomio asignado a un nudo (o enlace) orientado.

Una de las formas para calcular el polinomio de Alexander es la siguiente:

Si  $D$  es un diagrama regular orientado de un nudo  $K$ . Supóngase que  $D$  tiene  $n$  cruces que los arcos y cruces de están enumerados de 1 a  $n$ .

Se construye una matriz  $M$  de  $n \times n$  con entradas en el anillo de polinomio  $\mathbb{Z}[t]$  donde las entradas de la  $l$ -ésima fila ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) están determinadas por el  $l$ -ésimo cruce. A saber:

Si el cruce  $l$  es positivo, con  $i$  el arco que pasa por arriba y  $j, k$  los arcos que cruzan por debajo, como se muestra en la figura inciso a) , entonces

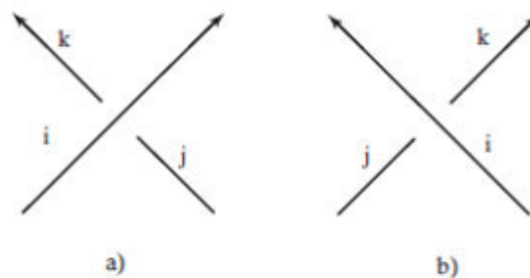


Figura 20. Cruce positivo (a) y cruce negativo (b). Teoría de nudos con aplicaciones a la enzimología de Perla Rebeca Sánchez Vargas

$$M_{l,i} = 1 - t$$

$$M_{l,j} = -1$$

$$M_{l,k} = t$$

Si el cruce  $l$  es negativo, con  $i$  el arco que pasa por arriba y  $j, k$  los arcos que cruzan por debajo, como se muestra en la figura inciso  $b$ ), entonces

$$M_{l,i} = 1 - t$$

$$M_{l,j} = t$$

$$M_{l,k} = -1$$

Si  $j = k$ , entonces se suman los valores de las columnas  $j, k$ , de manera que  $M_{l,j} = M_{l,k} = t - 1$  todas las demás entradas de la  $l$ -ésima fila son cero. De la matriz anterior  $M$ , se eliminan la última fila y la última columna para obtener una matriz de  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

$M_A$  conocida como la matriz de Alexander

**Definición 2.2.3.1:** Si  $K$  es un nudo y  $D$  un diagrama regular orientado de  $K$ , se define el polinomio de Alexander como  $A_K(t) = \det(M_A)$

Ejemplo 2.2.3.1: Hallar el polinomio de Alexander del nudo  $4_1$

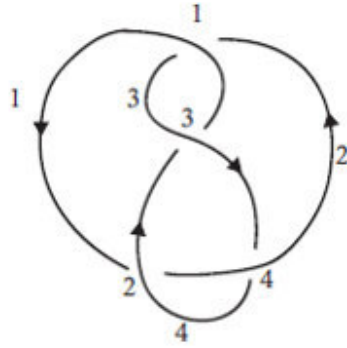


Figura 21: Nudo  $4_1$  mejor conocido como nudo ocho. Teoría de nudos con aplicaciones a la enzimología de Perla Rebeca Sánchez Vargas

El cruce 1 es un cruce positivo, donde  $i = 1, j = 2$  y  $k = 3$

$$M_{1,1} = 1 - t$$

$$M_{1,2} = -1$$

$$M_{1,3} = t$$

El cruce 2 es un cruce negativo, donde  $i = 4, j = 1$  y  $k = 2$

$$M_{2,4} = 1 - t$$

$$M_{2,1} = t$$

$$M_{2,2} = -1$$

El cruce 3 es un cruce positivo, donde  $i = 3, j = 4$  y  $k = 1$

$$M_{3,3} = 1 - t$$



$$M_{3,4} = -1$$

$$M_{3,1} = t$$

El cruce 4 es un cruce negativo, donde  $i = 2, j = 3$  y  $k = 4$

$$M_{4,2} = 1 - t$$

$$M_{4,3} = t$$

$$M_{4,4} = -1$$

La matriz  $M$  de  $4 \times 4$  es:

$$M = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t & 0 \\ t & -1 & 0 & 1-t \\ t & 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 1-t & t & -1 \end{pmatrix}$$

Luego se elimina la última fila y la última columna obteniendo así a  $M_A$

$$M_A = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t \\ t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

El polinomio de Alexander del nudo  $4_1$  es:

$$A_{4_1} = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t \\ t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$A_{4_1}(t) = (1-t)[(-1)(1-t) - 0] - (-1)[t(1-t) - 0] + t(0 + t)$$

$$= -t^2 + 3t - 1 \blacksquare$$

### 2.2.4 Polinomio de Conway:

Consideremos  $D$  un diagrama regular de un nudo  $K$  (o enlace). Se toma un cruce  $c_i$  del diagrama  $D$  y una vecindad de esto, sean  $D_+, D_-, D_0$  diagramas regulares tales que son iguales a  $D$ , excepto la vecindad de  $c_i$

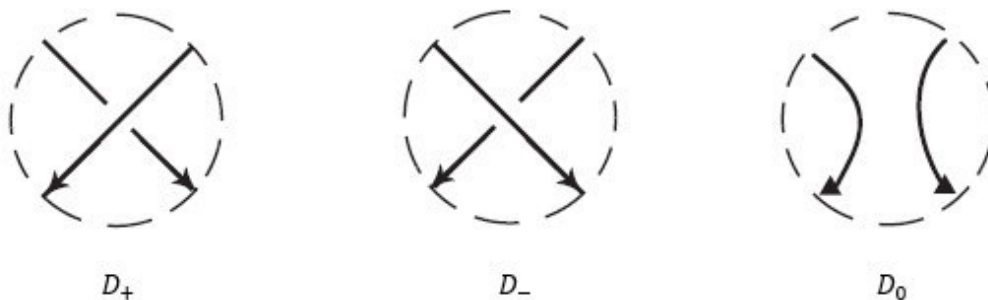


Figura 22: Diagramas regulares  $D_+, D_-$  y  $D_0$ . Teoría de nudos con aplicaciones a la enzimología  
de Perla Rebeca Sánchez Vargas

Esta diferencia se muestra en la figura, en  $D_+, c_i$  es positivo; en  $D_-, c_i$  es negativo y en  $D_0, c_i$  se elimina de la siguiente manera:

La vecindad que tiene como centro  $c_i$  intersecta  $D$  en cuatro puntos de manera que se borra el interior de dicha vecindad, excepto los cuatro puntos de la intersección, luego estos cuatro puntos se unen de tal manera que no se vuelva a crear un cruce y además que al unirlos preservan la orientación de  $D$

Siendo  $K_+, K_-$  y  $K_0$  los nudos de  $D_+, D_-$  y  $D_0$  respectivamente.

Dado  $D_+$  o  $D_-$  se puede cambiar el uno en el otro reemplazando la vecindad de  $c_i$  por otro lado, de la misma manera  $D_+$  o  $D_-$  se pueden cambiar a  $D_0$ , a estos cambios se les llama Operación de Skein.

A los diagramas regulares  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D_0$  se les llama Diagrama de Skein.

**Definición 2.2.4.1:** Sea  $K$  un nudo (o enlace) orientado, el polinomio de Conway denotado por  $\nabla_K(z)$  esta definido por los siguientes axiomas:

- 1) Invariancia: Si  $K$  y  $K'$  son nudos (o enlaces) equivalentes, entonces  $\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$
- 2) Normalización: Si  $K$  es un nudo trivial, entonces  $\nabla_K(z) = 1$
- 3) Relación de Skein: Dado  $D$  un diagrama regular de  $K$ , se cumple:

$$\nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z) = z\nabla_{D_0}(z)$$

**Observación 2.2.4.1:** En lo que sigue, tomaremos  $\nabla_K(z)$  como invariante bajo movimiento Reidemeister. Ver [6]

Forma recursiva de calcular el polinomio de Conway:

- Sea  $K$  un nudo (o enlace) orientado y  $D$  un diagrama regular de  $K$ . Se toma un cruce  $c_i$  de  $K$ , luego se identifica si el cruce es positivo o negativo de forma que se obtiene dos posibles resultados:  $D = D_+$  o  $D = D_-$
- Si  $D = D_+$  entonces se aplican las operaciones de Skein a  $D = D_+$  para obtener  $D_-$  y  $D_0$
- Si  $D = D_-$  entonces se aplican las operaciones de Skein a  $D = D_-$  para obtener  $D_+$  y  $D_0$
- Sin pérdida de generalidad, supóngase que  $c_i$  es positivo, entonces  $D = D_+$  luego debajo de  $D$  se dibujan  $D_-$  y  $D_0$  y se conectan por medio de una línea a  $D_+$

De acuerdo a la relación de Skein reescrita de la siguiente manera:

$$\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z) + z\nabla_{D_0}(z)$$

$$\nabla_{D_-}(z) = \nabla_{D_+}(z) - z\nabla_{D_0}(z)$$

A la línea que conecta  $D_+$  con  $D_-$  se le asigna  $+1$  mientras que a la línea que conecta  $D_+$  con  $D_0$  se le asigna  $+z$ , si  $D_-$  o  $D_0$  son diagramas equivalentes al nudo trivial o al enlace trivial, entonces esta rama de nivel esta terminada, de lo contrario se encoje una de las ramas del nivel sin terminar luego se toma un cruce  $c_j$  del diagrama que se haya escogido (no importa que rama se escoja al final todas las ramas se deben continuar hasta que se llegue a el nudo trivial o al enlace trivial) y se identifica si  $c_j$  es positivo o negativo luego se realiza el mismo proceso descrito arriba para  $D_+$ , el proceso es análogo cuando  $D = D_-$  solo se debe utilizar la igualdad reescrita de la relación de Skein.

El polinomio de Conway se obtiene como la suma del producto de los coeficientes (asignados a las líneas conectoras) por el respectivo polinomio de Conway del nudo (o enlace) empezando desde el ultimo nivel.

El polinomio  $\nabla_K(z)$  definido anteriormente está bien definido y esta únicamente determinado por los axiomas dados, ver [6]

**Teorema 2.2.4.1:** Si  $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  es un enlace trivial, con  $m \geq 2$ , entonces

$$\nabla_L(z) = 0$$

**Prueba:**

Sea  $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  es un enlace trivial con  $m \geq 2$

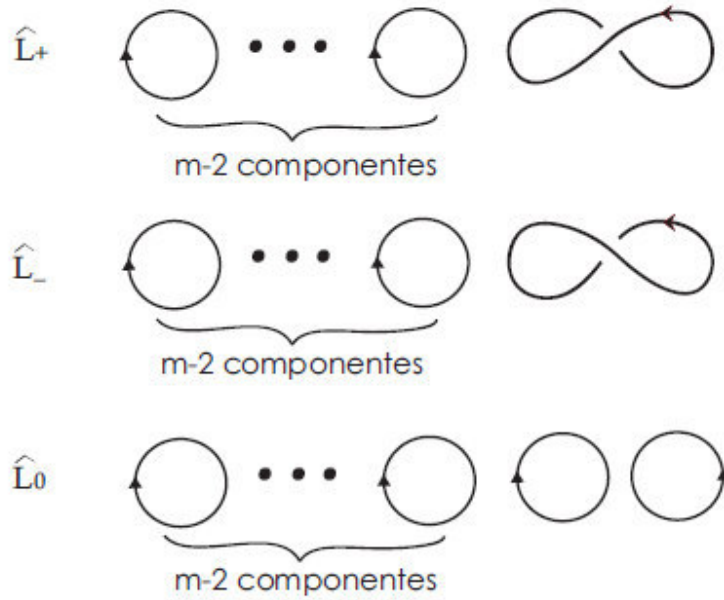


Figura 23: Diagramas regulares de un enlace trivial. Teoría de nudos con aplicaciones a la enzimología de Perla Rebeca Sánchez Vargas

La relación de Skein correspondiente a la figura es:  $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$

Dado que  $L_+$  y  $L_-$  son enlaces triviales de  $(m - 1)$  componentes equivalentes, entonces

$\nabla_{L_+}(z) = \nabla_{L_-}(z)$ , por lo tanto  $\nabla_{L_0}(z) = 0$  ■

Ejemplo 2.2.4.1: Hallar el polinomio de Conway del nudo trébol

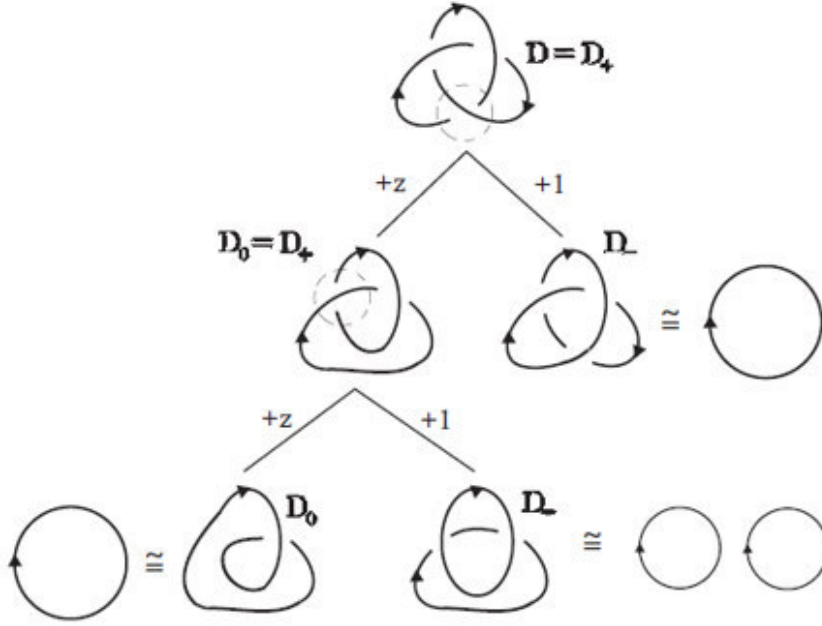


Figura 24: Algoritmo utilizado para hallar el polinomio de Conway del nudo trébol. Teoría de nudos con aplicaciones a la enzimología de Perla Rebeca Sánchez Vargas

Nótese en la figura que  $D_+$  del primer nivel no es igual al  $D_+$  del segundo nivel, sin embargo se maneja la misma notación ya que de lo contrario se volvería engorrosa.

Luego, el polinomio de Conway asociado al nudo trébol es:

$$\nabla_{3_2}(z) = 1(1) + z[1(0) + 1(z)] = 1 + z^2$$

**Teorema 2.2.4.2:** Si  $K$  es un nudo, entonces

$$A_K(t) = \nabla_K\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Es decir, si se reemplaza  $z$  por  $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$  en el polinomio de Conway se obtiene el polinomio de Alexander.

**Prueba:** Vease K. Murasugi, Knot Theory and its Applications, Birkhäuser, 1996 [6]

### 2.2.5 Polinomio de Jones:

**Definición 2.2.5.1:** Sea  $K$  un nudo o un enlace orientado y  $D$  un diagrama regular de  $K$ , el polinomio de Jones  $V_K(t)$  está definido en base a los siguientes axiomas:

- a) Si  $K$  es el nudo trivial, entonces  $V_K(t) = 1$
- b) Sean  $D_+, D_-$  y  $D_0$  diagramas de Skein, luego la siguiente relación de Skein se cumple:

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{D_0}(t)$$

El algoritmo para calcular el polinomio de Jones es análogo al que se utiliza para obtener el polinomio de Conway.

Así la relación de Skein de la definición anterior se escribe de la siguiente manera:

$$V_{D_+}(t) = t^2V_{D_-}(t) + tzV_{D_0}(t)$$

$$V_{D_-}(t) = t^{-2}V_{D_+}(t) - t^{-1}zV_{D_0}$$

Donde  $z = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$

Para probar que el polinomio de Jones está únicamente determinado por los axiomas anteriores, ver [7] [8]

**Proposición 2.2.5.1:** Sea  $\mathcal{O}_\mu$  el enlac trivial con  $\mu$  componentes, entonces

$$V_{\mathcal{O}_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\mu-1} \dots (*)$$

**Prueba:**

Se proba por inducción sobre  $\mu$

Para  $\mu = 1$ , se tiene que  $\mathcal{O}_1$  es igual al nudo trivial y  $V_{\mathcal{O}_1}(t) = (-1)^{1-1} \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{1-1} = 1$

De manera que  $(*)$  cumple con el axioma 1 de la definición y por tanto para  $\mu = 1$

Ahora supóngase que  $(*)$  se cumple para  $\mu = k - 1$  y se demostrará que se cumple para  $\mu = k$

$$V_{\mathcal{O}_\mu}(t) = (-1)^{\mu-2} \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2}$$

Considerando el esquema de la figura se tiene que  $\hat{L}_+ \cong \hat{L}_- \cong \mathcal{O}_{\mu-1}$  y  $\hat{L}_0 \cong \mathcal{O}_\mu$ , luego de la hipótesis de inducción y de  $(*)$  se obtiene:

$$\left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\mathcal{O}_\mu}(t) = \frac{1}{t} (-1)^{\mu-2} \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2} - t (-1)^{\mu-2} \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2}$$

$$\left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\mathcal{O}_\mu}(t) = (-1)^{\mu-2} \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2} \left( \frac{1}{t} - t \right)$$

$$\left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\mathcal{O}_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2} \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

$$V_{\mathcal{O}_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-1}$$

Con lo que queda demostrado.



Ejemplo 2.2.5.1: Calcular el polinomio de Jones del nudo trébol

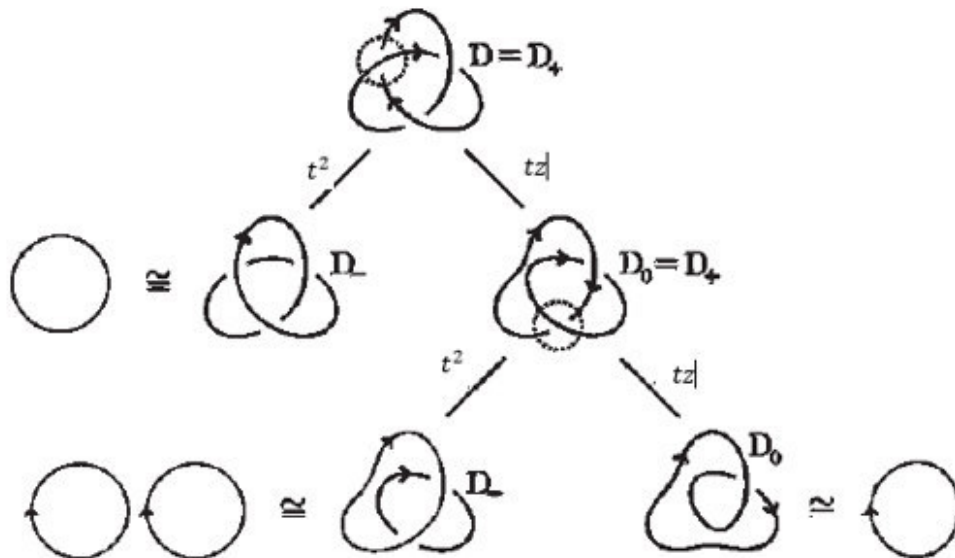


Figura 25 .Utilizando el algoritmo para hallar el polinomio de Jones. Introducción a la teoría de nudos de Luis Cisneros Molina

$$V_K(t) = t^2 V_0(t) + t^3 z V_{0_2}(t) + t^2 z^2 V_0(t)$$

$$V_K(t) = t^2 + t^3 \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \left( - \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \right) + t^2 \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right)^2$$

$$V_K(t) = t^2 - t^2(t^2 - 1) + t(t^2 - 2t + 1)$$

$$V_K(t) = t^2 - t^4 + t^2 + t^3 - 2t^2 + t$$

$$V_K(t) = t + t^3 - t^4$$

## Capítulo 3

### Aplicación:

En este capítulo aplicaremos los invariantes de polinomios que hemos visto en el capítulo anterior, hallaremos los respectivos polinomios de los siguientes nudos:

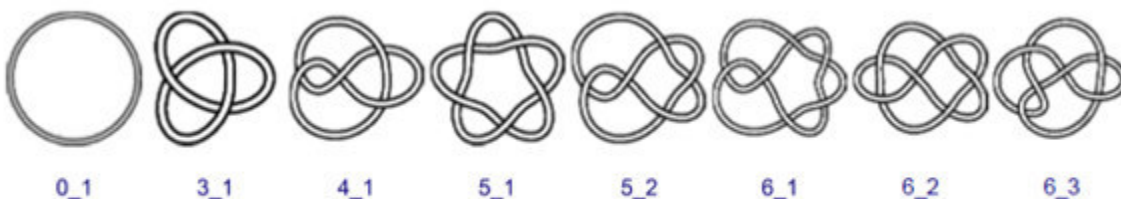


Figura 26: Nudos de hasta de seis cruces. Knot\_Table

Del nudo trivial sabemos que sus polinomios de Conway, Alexander y Jones son iguales a uno, esto visto por los axiomas.

Del nudo 3\_1 tenemos:

Su polinomio de Conway es:

$$\begin{aligned}\nabla_{3_1}(Z) &= 1(1) - z(1(0) - z(1)) \\ &= 1 - z(-z) = 1 + z^2\end{aligned}$$

Su polinomio de Alexander es:

$$A_{3_1}(t) = \nabla_{3_1}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = t - 1 - t^{-1}$$

Su polinomio de Jones es:

$$V_{3_1}(t) = t^{-2}V_{0_1}(t) - t^{-1}(Z)[t^{-2}V_{0_2}(t) - t^{-1}zV_{0_1}(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t^2}(1) - \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{t^2} \left( - \left( \frac{t+1}{\sqrt{t}} \right) \right) + \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) (1) \\
&= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}
\end{aligned}$$

Del nudo 4\_1 tenemos:

Su polinomio de Conway es:

$$\begin{aligned}
\nabla_{4_1}(t) &= 1\nabla_{\mathcal{O}_1}(z) - z(1\nabla_{\mathcal{O}_2}(z) + z\nabla_{\mathcal{O}_1}(z)) \\
&= 1 - z(0 + z) \\
&= 1 - z^2
\end{aligned}$$

Su polinomio de Alexander es:

$$A_{4_1}(t) = \nabla_{4_1} \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = t^{-1}(-t^2 + 3t - 1)$$

Su polinomio de Jones es:

$$\begin{aligned}
V_{4_1}(t) &= t^{-2}V_{\mathcal{O}_1}(t) - t^{-1}z[t^2V_{\mathcal{O}_2}(t) + tzV_{\mathcal{O}_1}(t)] \\
&= t^{-2}(1) - t^{-1} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \left[ t^2 \left( - \left( \frac{t+1}{\sqrt{t}} \right) \right) + t \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) (1) \right] \\
&= t^{-2} - t^{-3} + t^2 - t + 1
\end{aligned}$$

Del nudo 5\_1 tenemos:

Su polinomio de Conway es:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{5_1}(z) &= 1 \left( \nabla_{3_1}(z) \right) - z \left[ 1 \left( 1 \left( \nabla_{\mathcal{O}_2}(z) - z \nabla_{\mathcal{O}_1}(z) \right) \right) - z \nabla_{3_1}(z) \right] \\
 &= 1 + z^2 - z[1(0 - z) - z(1 + z^2)] \\
 &= 1 + 3z^2 + z^4
 \end{aligned}$$

Su polinomio de Alexander es:

$$A_{5_1}(t) = \nabla_{5_1} \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = 1 - t - t^{-1} + t^{-2}$$

Su polinomio de Jones es:

$$\begin{aligned}
 V_{5_1}(t) &= t^{-2}V_{3_1}(t) - t^{-1}z \left[ t^{-2} \left( t^{-2}V_{\mathcal{O}_2}(t) - t^{-1}zV_{\mathcal{O}_1}(t) \right) - t^{-1}zV_{3_1} \right] \\
 &= t^{-2}(t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) - t^{-1}z \left[ t^{-4} \left( - \left( \frac{t+1}{\sqrt{t}} \right) \right) - t^{-3}z(1) - t^{-1}z(t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) \right] \\
 &= -t^{-5} + t^{-6} + t^{-4} - t^{-7} + t^{-2}
 \end{aligned}$$

Del nudo 5\_2 tenemos:

Su polinomio de Conway es:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{5_2}(z) &= 1[1\nabla_{\mathcal{O}_1}(z) - z(1\nabla_{\mathcal{O}_2}(z) - z\nabla_{\mathcal{O}_1}(z))] - z(-z\nabla_{\mathcal{O}_1}(z) + 1\nabla_{\mathcal{O}_2}(z)) \\
 &= 1 - z(0 - z) - z(-z + 0) \\
 &= 1 + 2z^2
 \end{aligned}$$

Su polinomio de Alexander es:

$$A_{5_2}(t) = \nabla_{5_2} \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = 1 + 2t - 4 + 2t^{-1}$$

Su polinomio de Jones es:

$$\begin{aligned} V_{5_2}(t) &= t^{-2} [t^{-2} V_{\mathcal{O}_1}(t) - t^{-1} z (t^{-2} V_{\mathcal{O}_2}(t) - t^{-1} z V_{\mathcal{O}_1}(t))] - t^{-1} z (t^{-2} V_{\mathcal{O}_2}(t) - t^{-1} z V_{\mathcal{O}_1}(t)) \\ &= \frac{1}{t^2} \left[ \frac{1}{t^2} (1) - \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{t^2} \left( - \left( \frac{t+1}{\sqrt{t}} \right) \right) - \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) (1) \right] \\ &\quad - \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{t^2} \left( - \left( \frac{t+1}{\sqrt{t}} \right) \right) - \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{t} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) (1) \\ &= -t^{-6} + t^{-5} - t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} \end{aligned}$$

Del nudo 6\_1 tenemos:

Su polinomio de Conway es:

$$\begin{aligned} \nabla_{6_1}(z) &= z [-z \nabla_{\mathcal{O}_1}(z) + 1 (1 \nabla_{\mathcal{O}_2}(z) - z \nabla_{\mathcal{O}_1}(z))] + 1 \nabla_{\mathcal{O}_1}(t) \\ &= z [-z(1) + 1(0 - z)] + 1(1) \\ &= 1 - 2z^2 \end{aligned}$$

Su polinomio de Alexander es:

$$A_{6_1}(t) = \nabla_{6_1} \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = 1 - 2t + 4 - 2t^{-1}$$

Su polinomio de Jones es:

$$V_{6_1}(t) = t^2 V_{\mathcal{O}_1}(t) + tz [t^{-2} (t^{-2} V_{\mathcal{O}_2}(t) - t^{-1} z V_{\mathcal{O}_1}(t)) - t^{-1} z V_{\mathcal{O}_1}(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= t^2(1) + tz \left[ t^{-2}(t^{-2}) \left( -\left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \right) - t^{-3} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) (1) - t^{-1} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) (1) \right] \\
&= 2 + t^{-4} - t^{-3} + t^{-2} - 2t^{-1} - t + t^2
\end{aligned}$$

Del nudo 6\_2 tenemos:

Su polinomio de Conway es:

$$\begin{aligned}
\nabla_{6_2}(t) &= 1\nabla_{3_1}(z) + z \left[ 1 \left( 1\nabla_{0_2}(z) - z\nabla_{0_1}(z) \right) - z\nabla_{3_1}(z) \right] \\
&= 1(1 + z^2) + z(0 - z) - z^2(1 + z^2) \\
&= 1 - z^2 - z^4
\end{aligned}$$

Su polinomio de Alexander es:

$$A_{6_2}(t) = \nabla_{6_2} \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = 1 - t^2 + 3t - 4 + 3t^{-1} - t^{-2}$$

Su polinomio de Jones es:

$$\begin{aligned}
V_{6_2}(t) &= t^2 V_{3_1}(t) + tz \left[ t^{-2} (t^{-2} V_{0_2}(t) - t^{-1} z V_{0_1}(t)) - t^{-1} z V_{3_1}(t) \right] \\
&= t^2 (t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) \\
&\quad + tz \left[ t^{-2} \left( t^{-2} \left( -\left( \frac{t+1}{\sqrt{t}} \right) \right) - t^{-1} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) \right) - t^{-1} \left( \frac{t-1}{\sqrt{t}} \right) (t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) \right] \\
&= t^{-5} - 2t^{-4} + 2t^{-3} - 2t^{-2} + 2t^{-1} - 1 + t
\end{aligned}$$

Del nudo 6\_3 tenemos:

Su polinomio de Conway es:

$$\begin{aligned}\nabla_{6_3}(z) &= 1\nabla_{3_2}(z) - z[1(\nabla_{\mathcal{O}_2}(z) + z\nabla_{\mathcal{O}_1}(z)) - z\nabla_{3_2}(z)] \\ &= 1 + z^2 - z[1(0 + z) - z(1 + z^2)] \\ &= 1 + z^2 + z^4\end{aligned}$$

Su polinomio de Alexander es:

$$A_{6_2}(t) = \nabla_{6_2}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = 1 + t^2 - 3t + 4 - 3t^{-1} + t^{-2}$$

Su polinomio de Jones es:

$$\begin{aligned}V_{6_3}(t) &= t^{-2}V_{3_2}(t) - t^{-1}z[t^{-2}(t^2V_{\mathcal{O}_2}(t) + tzV_{\mathcal{O}_1}(t)) - t^{-1}zV_{3_2}(t)] \\ &= t^{-2}(t + t^3 - t^4) - t^{-1}z\left[-\left(\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right) + t^{-1}\left(\frac{t-1}{\sqrt{t}}\right)(1) - t^{-1}\left(\frac{t-1}{\sqrt{t}}\right)(t + t^3 - t^4)\right] \\ &= -t^3 - 4t^2 - 2t^4 - 2t^{-1} + 2t^{-2} - t^{-3} + 3\end{aligned}$$

## **Conclusión:**

Mediante el desarrollo de los polinomios en los nudos ya mencionados, pudimos observar que, en el caso del nudo trébol  $3_1$  y  $3_2$  de la figura 3.1 y figura 2.2.12 respectivamente, que sus polinomios de Conway coinciden mas no su polinomio de Jones. Con eso quiere decir que no se tiene una única clasificación de nudos, pues para Conway los nudos  $3_1$  y  $3_2$  son iguales, mientras que para Jones son distintos.

Es por eso la gran dificultad de clasificarlos, y más difícil aun con nudos con más cruces, para seguir con la clasificación de más de siete cruces nos obliga a buscar condiciones más fuertes un algoritmo y diseñar un algoritmo que permita hacer de forma automática parte del trabajo que se hizo de manera manual.

## **¿Para qué sirve la teoría de nudos?**

Actualmente la teoría de nudos encuentra aplicaciones en áreas tan diversas como el análisis de circuitos electrónicos o la criptografía. Ha mostrado ser también de gran utilidad en la modelización de la física de polímeros y de cristales líquidos. Pero quizás la más importante aplicación de la teoría de nudos a otras ciencias es la que tiene lugar en el dominio de la biología molecular



## **Bibliografía**

- [1]Lozano, M. (s.f.). Teoría de nudos en el siglo XX. Universidad de Zaragoza, España.
- [2]José Luis Cisneros Molina. Introducción a la teoría de nudos. Universidad Autónoma de Ciudad de Juarez, México
- [3]Luping Wang Xiao. Introducción a la teoría de nudos. Universidad de Cantabria
- [4]Perla Rebeca Sanchez Vargas. Teoría de nudos con aplicaciones a la enzimología. Instituto Politécnico Nacional.
- [5]Charles Livingstone, Knot Theory, The Carus Mathematical Monographs
- [6] K. Murasugi, Knot Theory and its Applications, Birkhauser, 1996
- [7] Jones. V. Hecke Algebra Representations of braids Group and Link Polynomials
- [8] Lickorish. W. and K. Millett, A Polynomial Invariant of Oriented Links, Topology, Vol 26 (1987)
- [9] Charles Livingstone, Knot Theory, The Carus Mathematical Monographs
- [10] Armando Martinez, Matemáticas de los nudos
- [11] Akio Kawauchi, A survey of knot theory, 1990